



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Las funciones de Bessel y la función Gamma

Ana Acebrás Bouza

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Las funciones de Bessel y la función Gamma

Ana Acebrás Bouza

Febreiro, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Las funciones de Bessel y la función Gamma

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Las funciones de Bessel y la función Gamma
Breve descripción do contido
Estudar a orixe das funcións de Bessel e da función Gamma. Concepto de función de Bessel e da función gamma. Propiedades elementais. Ecuación diferencial de Bessel. Por último se verán algunhas aplicacións de ditas funcións á algúns problemas físicos
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. La función gamma	1
2. Las funciones de Bessel	7
2.1. La ecuación de Bessel	8
2.2. Las funciones de Bessel de primera clase	8
2.3. La solución general de la ecuación de Bessel	12
2.4. Ecuaciones de Bessel que no parecen serlo	17
3. Propiedades de las funciones de Bessel	21
3.1. Identidades	21
3.2. Las funciones de Bessel esféricas	23
3.3. Ceros de las funciones de Bessel	24
3.4. Propiedades de ortogonalidad	28
3.5. Series de Bessel	29
3.6. La función generatriz	32
3.7. La fórmula integral de Bessel	34
3.8. Algunas fracciones continuas	37
4. Funciones de Bessel y membranas vibrantes	39
4.1. La ecuación del movimiento	39
4.2. La membrana circular	41
4.3. Condiciones iniciales especiales	43
Bibliografía	47

Resumen

Las funciones de Bessel son unas funciones especiales con múltiples aplicaciones en ecuaciones diferenciales, matemática aplicada y física matemática. Surgen en distintos contextos y de diferentes maneras, siendo una de ellas como soluciones de una ecuación diferencial ordinaria llamada ecuación de Bessel.

La función gamma es una función muy importante en muchas ramas de las matemáticas que extiende la definición del factorial de un número entero no negativo. El objetivo de introducirla en este trabajo es la utilización en el estudio de las funciones de Bessel. Comenzamos con un capítulo dedicado a esta función y a ver algunas de sus interesantes propiedades.

Posteriormente, definimos la ecuación de Bessel y nos centramos en la búsqueda de su solución general. Es durante el procedimiento de búsqueda de la solución general cuando aparecen las funciones de Bessel. Deducimos algunas de sus propiedades, definimos las series de Bessel, vemos la función generatriz, probamos la fórmula integral y mostramos una fracción continua infinita. También representamos algunas funciones en MAPLE y escribimos el código para una fórmula de recurrencia en MATLAB.

Finalmente, aplicamos las funciones de Bessel en el estudio de las vibraciones de una membrana circular.

Abstract

Bessel functions are a kind of special functions appearing in differential equations, applied mathematics and mathematical physics. They arise in different contexts such as solutions of an ordinary differential equation named the Bessel equation.

The gamma function is a very important function in many areas of mathematics. It extends the definition of the factorial function of a non negative integer. We introduce the gamma function in order to use it on the study of Bessel functions. We start with a chapter dedicated to define this functions and to prove some of its interesting properties.

Subsequently, we define the Bessel equation and we focus on determining its general solution. Bessel functions appear during the search of the general solution. We deduce some of their properties, define spherical Bessel functions, see the generating function, prove the integral formula and show an infinite continued fraction. We also plot some Bessel functions in MAPLE and implement the program of a recursive formula in MATLAB.

Finally, we use Bessel functions in the study of the vibrations of a circular membrane.

Introducción

Las funciones de Bessel son unas funciones especiales con múltiples aplicaciones en ecuaciones diferenciales, matemática aplicada y física matemática. Surgen en distintos contextos y de diferentes maneras, siendo una de ellas como soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de orden dos con coeficientes no constantes llamada ecuación de Bessel.

La función gamma es una función que aparece en probabilidad y en variable compleja. Extiende la definición del factorial de un número entero no negativo al plano complejo. El objetivo de introducirla en este trabajo es la utilización en el estudio de las funciones de Bessel. Comenzamos con un capítulo dedicado a esta función y a ver algunas de sus interesantes propiedades. Calculamos también algunos valores que serán de utilidad.

El segundo capítulo nos dedicamos a buscar la solución general de la ecuación de Bessel, definimos las funciones de Bessel de primera clase y las funciones de Bessel de segunda clase. Representamos algunas de ellas en MAPLE. Utilizamos también MATLAB para programar una fórmula de recurrencia

En el tercer capítulo nos centramos en algunas propiedades importantes de las funciones de Bessel; probamos las identidades, probamos propiedades de los ceros de las funciones de Bessel y las propiedades de ortogonalidad. También definimos las funciones de Bessel esféricas, las series de Bessel (también llamadas series de Fourier-Bessel), calculamos la función generatriz, probamos la fórmula integral y mostramos una fracción continua infinita.

En el cuarto(y último) capítulo tratamos una aplicación de las funciones de Bessel en un problema físico: vemos como nos pueden ser de ayuda estas funciones en el estudio de las vibraciones de una membrana circular.

Capítulo 1

La función gamma

La función gamma es una función de gran importancia en muchas ramas de las matemáticas. Se utiliza, por ejemplo, en probabilidad y en variable compleja. Aquí la introducimos porque la vamos a necesitar en el estudio de las funciones de Bessel.

La finalidad de definir la función gamma es dotar de un significado razonable a $p!$, y más en general, a $(p+n)!$ para $n = 0, 1, 2, \dots$; cuando el número real no negativo p no es un entero. La función gamma viene dada por

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt, \quad p > 0. \quad (1.1)$$

Vamos a estudiar la convergencia de la integral impropia anterior. Escribimos

$$\int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$$

como suma de las integrales

$$\int_0^1 t^{p-1} e^{-t} dt \quad \text{y} \quad \int_1^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$$

Veamos la convergencia de la primera de ellas. La función $t^{p-1}e^{-t}$ no negativa para $0 \leq t \leq 1$. Como $t > 0$, $0 < e^{-t} < 1$, tenemos

$$\int_0^1 t^{p-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{p-1} dt.$$

Si $p = 0$,

$$\int_0^1 t^{-1} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\epsilon^1 t^{-1} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \log t \Big|_\epsilon^1 = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \log \epsilon = +\infty.$$

Si $p < 0$,

$$\int_0^1 t^{p-1} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\epsilon^1 t^{p-1} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{p} x^p \Big|_\epsilon^1 = +\infty.$$

Si $p > 0$,

$$\int_0^1 t^{p-1} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 t^{p-1} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{p} x^p \Big|_{\epsilon}^1 = \frac{1}{p},$$

y, por tanto, la integral $\int_0^1 t^{p-1} e^{-t} dt$ converge.

Ahora veamos la convergencia de la segunda integral. La función $t^{p-1} e^{-t}$ es no negativa en $[1, \infty]$. Como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{p-1} e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{p+1}}{e^t} = 0$$

y la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}$$

es convergente tenemos que

$$\int_1^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$$

es convergente independientemente del valor de p .

En consecuencia, para garantizar la convergencia de la integral de (1.1) es necesaria la restricción a p positivos.

Proposición 1.1. *Se cumple que*

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad p > 0$$

Demostración. Integramos por partes:

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^p e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-t^p e^{-t} \Big|_0^b + p \int_0^b t^{p-1} e^{-t} dt \right) \\ &= p \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^{p-1} e^{-t} dt \right) = p\Gamma(p), \end{aligned}$$

pues $\frac{b^p}{e^b} \rightarrow 0$ cuando $b \rightarrow \infty$. □

Como

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

aplicando la proposición 1.1, tenemos

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1, \quad \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

y en general

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \geq 0.$$

La fórmula de la Proposición 1.1 escrita de la siguiente manera

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \quad (1.2)$$

permite definir $\Gamma(p)$ para ciertos valores $p < 0$ sin tener que recurrir a la integral (1.1). Esta extensión de la definición es de utilidad en la práctica. Procedemos del modo siguiente: si $-1 < p < 0$, entonces $0 < p+1 < 1$. El miembro de la derecha en (1.2) tiene un valor y $\Gamma(p)$ se define igual a ese valor. Si $-2 < p < -1$, entonces $-2 < p < -1$. Usando otra vez (1.2), definimos $\Gamma(p)$ sobre el intervalo $-2 < p < -1$ en términos de los valores de $\Gamma(p+1)$ definidos anteriormente. Esto podemos repetirlo indefinidamente. Además,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \pm\infty$$

dependiendo si $p \rightarrow 0$ por la derecha o por la izquierda. El comportamiento de $\Gamma(p)$ se es análogo cerca de todos los enteros negativos.

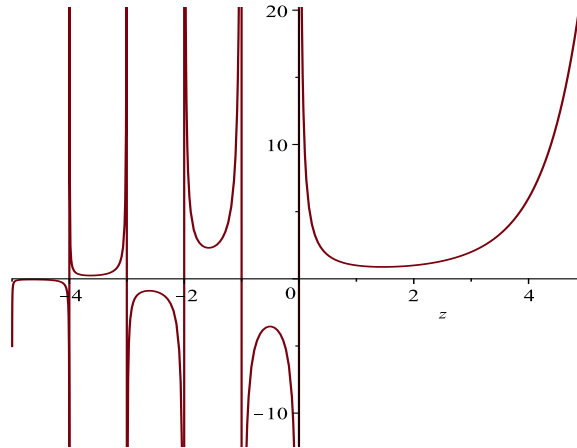


Figura 1.1: Función Gamma

Puesto que $\Gamma(p)$ nunca llega a ser cero, la función $\frac{1}{\Gamma(p)}$ está definida para todo p si asignamos a $\frac{1}{\Gamma(p)}$ el valor cero para $p = 0, -1, -2, \dots$

Teniendo en cuenta estas ideas, podemos definir

$$p! = \Gamma(p+1) \quad (1.3)$$

para todo p que no sea un entero negativo. Su función recíproca es

$$\frac{1}{p!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

está definida para todo $p \in \mathbb{R}$ y es cero cuando p es un entero negativo.

Otra posibilidad, que no desarrollaremos aquí es, a partir de la anterior construcción, extender analíticamente la función gamma al plano complejo.

Algunos valores interesantes de la función gamma

1) Se verifica que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

En efecto, mediante el cambio de variable $t = s^2$ obtenemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds.$$

Como s es una variable muda, podemos escribir

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Escribiendo esta integral doble en coordenadas polares

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta.$$

Calculamos esta última integral y llegamos a que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi,$$

por tanto,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (1.4)$$

2) Aplicando (1.3), la proposición 1.1, y (1.4) vemos fácilmente que

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{y} \quad \left(\frac{3}{2}\right)! = \frac{3\sqrt{\pi}}{2}$$

3) Se tiene que

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!} \sqrt{\pi} \quad (1.5)$$

para todo entero n no negativo.

En efecto, ya que por (1.3)

$$\left(\frac{1}{2} + n\right)! = \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right)$$

Aplicando la fórmula (1.3), la proposición 1.1 y la fórmula (1.4),

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \\ &= \left(\frac{2n+1}{2}\right) \left(\frac{2n-1}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} (2n+1)(2n-1) \cdots 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2n+2)(2n) \cdots 2 \cdot 1} \cdot \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)n \cdots 2 \cdot 1} \cdot \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{(2^{n+1})^2} \cdot \frac{2(n+1)(2n+1)!}{(n+1)n!} \cdot \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!} \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

4) Se verifica

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi} \quad (1.6)$$

para todo entero n no negativo.

Por la fórmula (1.3),

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(n - \frac{1}{2} + 1\right)$$

Haciendo algo similar a lo que hemos hecho para probar (1.5),

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(n - \frac{1}{2} + 1\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \\
 &= \left(\frac{2n-1}{2}\right) \left(\frac{2n-3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{1}{2^n} (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2n)(2n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi}.
 \end{aligned}$$

Capítulo 2

Las funciones de Bessel

Las funciones de Bessel son muy importantes en física matemática y en ingeniería. Tienen aplicaciones en la propagación de ondas, el movimiento de fluidos y especialmente en la teoría del potencial y la teoría de la difusión con simetría cilíndrica. También aparecen en problemas interesantes de matemática pura.

El matemático Daniel Bernoulli(1700-1782) fue el primero en encontrar las funciones de Bessel cuando estaba estudiando las vibraciones de una cadena colgante. Posteriormente aparecieron en la teoría de Euler(1707-1782) de las vibraciones de una membrana circular y en los trabajos de Bessel acerca del movimiento de los planetas.

Friedrich Wilhelm Bessel(1784-1846) fue un astrónomo alemán. Era íntimo amigo de Gauss(1777-1855), con el que mantuvo correspondencia durante muchos años. Fue el primero en determinar con precisión la distancia a una estrella fija. Descubrió también que Sirio, la estrella más brillante del firmamento es una estrella binaria, es decir, una estrella que va acompañada en su movimiento por otra. Esta compañera de Sirio fue la primera estrella muerta descubierta y es muy importante en las modernas teorías de la evolución estelar.



Friedrich Bessel

2.1. La ecuación de Bessel

La ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad (2.1)$$

donde $p \geq 0$, se llama *ecuación de Bessel*. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de orden dos con coeficientes no constantes. Sus soluciones reciben el nombre de *funciones de Bessel*.

(2.1) es la *forma canónica* de la ecuación de Bessel. Vamos a hallar su *forma normal*.

Dividimos (2.1) por x^2 y vemos que los nuevos coeficientes de y' e y'' son $P(x) = 1/x$ y $Q(x) = (x^2 - p^2)/x^2$ respectivamente. Obtenemos la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{(x^2 - p^2)}{x^2}y = 0.$$

Hacemos el cambio de variable $u(x) = \sqrt{x}y(x)$. Tenemos que $y(x) = u(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$. Por tanto,

$$y'(x) = -u(x)\frac{1}{2x\sqrt{x}} + u'(x)\frac{1}{\sqrt{x}}$$

y

$$y''(x) = u(x)\frac{3}{4x^2\sqrt{x}} - 2u'(x)\frac{1}{2x\sqrt{x}} + u''(x)\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Sustituimos estas expresiones en la nueva ecuación diferencial:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}u'' + \left(-2 \cdot \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right)u' + \left(\frac{3}{4x^2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{(x^2 - p^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right)u = 0.$$

Igualando a cero el coeficiente de u' , tenemos

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right)u = 0, \quad (2.2)$$

que es la forma normal de la ecuación de Bessel.

-

2.2. Las funciones de Bessel de primera clase

En esta sección vamos a hallar una solución particular de la ecuación de Bessel.

Un punto x_0 de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

es un *punto singular* si una de las funciones coeficientes $P(x)$, $Q(x)$, o ambas a la vez son no analíticas en x_0 . Se dice que x_0 es un *punto singular regular* si las funciones $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2 Q(x)$ son analíticas.

Enunciamos el siguiente teorema, que necesitaremos en lo que sigue

Teorema 2.1. *Supongamos que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)$$

y que los desarrollos en serie de potencias

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad y \quad x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

son válidos sobre un intervalo $|x| < R$, con $R > 0$. Sean m_1, m_2 las raíces de la ecuación indicial

$$m(m-1) + mp_0 + q_0 = 0$$

con $m_2 \leq m_1$. Entonces la ecuación () tiene al menos una solución*

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$

sobre el intervalo $0 < x < R$, donde los a_n quedan determinados en términos de a_0 por la fórmula de recurrencia

$$a_n [(m+n)(m+n-1) + (m+n)p_0 + q_0] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0$$

con m sustituido por m_1 , y la serie $\sum a_n x^n$ converge para $|x| < R$. Además, si $m_1 - m_2$ no es un entero positivo o cero, la ecuación () tiene una segunda solución independiente*

$$y_2 = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$

sobre ese mismo intervalo, y en este caso los a_n quedan determinados en términos de a_0 por la fórmula de recurrencia anterior con m sustituido por m_2 , y de nuevo la serie $\sum a_n x^n$ es convergente para $|x| < R$.

Ahora, procedemos a buscar la solución particular de la ecuación de Bessel. Hemos visto anteriormente que $P(x) = 1/x$ y $Q(x) = (x^2 - p^2)/x^2$. Multiplicando $P(x)$ por x y $Q(x)$ por x^2 obtenemos dos funciones analíticas. Por tanto, el origen es un punto singular regular.

La ecuación indicial es $m^2 - p^2 = 0$ y sus exponentes son $m_1 = p$ y $m_2 = -p$. Entonces, aplicando el teorema que hemos enunciado previamente, (2.1) admite una solución

$$y = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p}, \quad (2.3)$$

donde $a_0 \neq 0$ y la serie de potencias $\sum a_n x^n$ es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Calculamos la primera y la segunda derivada de y

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n+p-1)(n+p) a_n x^{n+p-2}.$$

Sustituimos en (2.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+p-1)(n+p) a_n x^{n+p} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+p} + \sum_{n=0}^{\infty} -p^2 a_n x^{n+p} = 0.$$

Agrupando los términos, llegamos a

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(2p+n) + a_{n-2}] x^{n+p} = 0, \quad (2.4)$$

igualamos a cero el coeficiente de x^{n+p} en (2.4) y obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia para los a_n

$$n(2p+n) a_n + a_{n-2} = 0, \quad (2.5)$$

es decir,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2p+n)}. \quad (2.6)$$

a_0 es no nulo y arbitrario. Como $a_{-1} = 0$, por (2.6), $a_1 = 0$. Aplicando (2.6) repetidas veces deducimos que $a_n = 0$ si n es impar. Los coeficientes no nulos de (2.3) son los a_n con n par, es decir,

$$a_0$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2p+2)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2p+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2p+6)} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)}, \dots$$

Una solución particular de (2.1) es

$$\begin{aligned} y &= a_0 x^p \left[1 - \frac{x^2}{2^2(p+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(p+1)(p+2)} - \frac{x^6}{2^6 3!(p+1)(p+2)(p+3)} + \cdots \right] \\ &= a_0 x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n! (p+1) \cdots (p+n)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sustituyendo $a_0 = 1/2^p p!$ en (2.7), definimos la *función de Bessel de orden p* . La denotamos por $J_p(x)$. Es decir,

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p p!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n! (p+1) \cdots (p+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p}}{n! (p+n)!} \quad (2.8)$$

Observemos que al haber introducido la función gamma la función $J_p(x)$ definida por (2.8) tiene sentido para todo $p \geq 0$, y que también hemos conseguido que (2.8) esté definida para todo $p \in \mathbb{R}$, ya que $\frac{1}{(p+n)!}$ ha adquirido significado para todo $p+n$.

Cabe destacar las funciones de Bessel de orden 0 y de orden 1

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

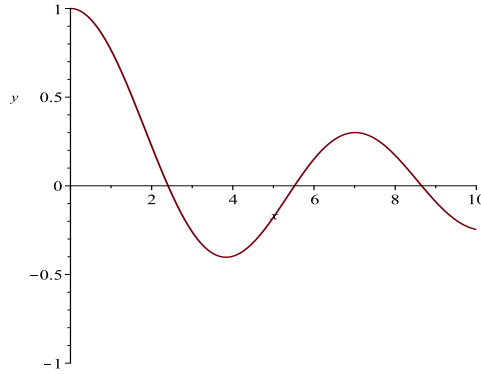


Figura 2.1: Función de Bessel de orden 0

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{1!2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots,$$

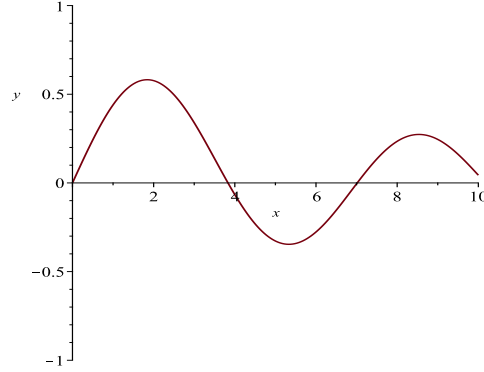


Figura 2.2: Función de Bessel de orden 1

2.3. La solución general de la ecuación de Bessel

Hemos hallado una solución particular de la ecuación de Bessel correspondiente al exponente $m_1 = p$, que hemos denotado por $J_p(x)$. Ahora procederemos a hallar la solución general, para ello tenemos que buscar una solución independiente de $J_p(x)$, es decir, una solución que no sea múltiplo constante de $J_p(x)$. Esta solución se denominará *función de Bessel de segunda clase*. Probamos ensayando con el otro exponente $m_2 = -p$, pero cuando la diferencia $m_1 - m_2 = 2p$ sea un entero positivo o cero encontraremos dificultades; equivalentemente, cuando la constante no negativa p sea un entero o un semientero.

Dado que en el segundo caso los problemas se pueden solucionar fácilmente empezaremos suponiendo que p no es entero. El proceso para la obtención de la solución J_{-p} es

similar al de obtención de J_p . La única diferencia es que (2.5) se convierte en

$$n(-2p + n)a_n + a_{n-2} = 0.$$

Si en esta expresión $p = 1/2$ y $n = 1$, no es necesario tomar $a_1 = 0$. Lo mismo ocurre cuando $p = 3/2$ y $n = 3$, no es necesario tomar $a_3 = 0$. Esto es así para todos los a_n con n impar. Pero lo que queremos es una solución particular, por tanto podemos poner $a_1 = a_3 = \dots = 0$. Todos los demás coeficientes se calculan como antes, y obtenemos una segunda solución

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-p}}{n!(-p+n)!}.$$

Desarrollamos la suma

$$\begin{aligned} J_{-p}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-p}}{n!(-p+n)!} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n}}{n!(-p+n)!} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \left[\frac{1}{(-p)!} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{1!(-p+1)!} + \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{1}{2!(-p+2)!} + \dots \right] \end{aligned}$$

y vemos que $J_{-p}(x)$ no está acotada cerca de $x = 0$. Como $J_p(x)$ es acotada cerca de $x = 0$, estas dos soluciones son independientes e

$$y = c_1 J_p + c_2 J_{-p}, \quad p \text{ no entero}, \quad (2.9)$$

es la solución general de (2.1) .

Cuando p es un entero $m \geq 0$ tenemos

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-m}}{n!(-m+n)!}$$

En el primer capítulo vimos que $\frac{1}{p!} = 0$ si p es negativo, por tanto los factores $\frac{1}{(-m+n)!}$ son cero si $n = 0, \dots, m-1$ y podemos escribir

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-m}}{n!(-m+n)!},$$

o, empezando la suma en cero,

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(x/2)^{2(n+m)-m}}{(n+m)!n!} = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+m}}{(n+m)!n!} = (-1)^m J_m(x)$$

Con esto demostramos que $J_{-m}(x)$ no es independiente de $J_m(x)$ cuando p es un entero entero positivo, por tanto

$$y = c_1 J_m(x) + c_2 J_{-m}(x)$$

no es la solución general de (2.1).

Debemos continuar buscando la solución general de la ecuación de Bessel. Primeramente, probamos suponiendo que $y_2 = vJ_m$ y trataremos de hallar la solución independiente. Tenemos

$$y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0 \quad (2.10)$$

Calculamos y_2' e y_2''

$$y_2' = J_m' v + v' J_m,$$

$$y_2'' = vJ_m'' + 2v'J_m' + v''J_m.$$

Sustituyendo estas expresiones y $y_2 = vJ_m$ en (2.10) y reordenando se tiene

$$v(J_m'' + PJ_m' + QJ_m) + v''J_m + v'(2J_m' + PJ_m) = 0. \quad (2.11)$$

$(J_m'' + PJ_m' + QJ_m) = 0$, pues J_m es solución de la ecuación de Bessel. Por tanto (2.11) se reduce a

$$v''J_m + v'(2J_m' + PJ_m) = 0,$$

es decir,

$$\frac{v''}{v'} = -2\frac{J_m'}{J_m} - P.$$

Integrando,

$$\log v' = -2 \log J_m - \int P dx.$$

entonces,

$$v' = \frac{1}{J_m^2} e^{-\int P dx}$$

Como $P = \frac{1}{x}$, tenemos

$$v = \int \frac{1}{xJ_m^2} dx$$

y

$$y_2 = vJ_m = J_m \int \frac{1}{xJ_m^2} dx.$$

El Wronskiano

$$W(J_m, y_2) = J_m y_2' - y_2 J_m'$$

es distinto de cero y entonces y_2 la solución independiente de $J_m(x)$ que buscábamos.

Sin embargo, es habitual hallar esta solución como sigue. Si p no es un entero, una función de la forma (2.9) con $c_2 \neq 0$ es una función de Bessel de segunda clase, incluyendo a $J_{-p}(x)$.

Un poco más adelante veremos que podemos definir la función de Bessel de segunda clase como

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}. \quad (2.12)$$

Por tanto, podemos escribir (2.9) de la forma.

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x), \quad p \text{ no entero.}$$

Veamos ahora el caso de que p sea un entero m . La función

$$Y_m(x) = \lim_{p \rightarrow m} Y_p(x).$$

existe ya que, aplicando la regla de L'Hôpital, podemos calcular el límite

$$\begin{aligned} Y_m(x) &= \lim_{p \rightarrow m} \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \\ &= \lim_{p \rightarrow m} \frac{\frac{\partial}{\partial p} [J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)]}{\pi \cos p\pi} \\ &= \lim_{p \rightarrow m} \frac{\frac{\partial}{\partial p} J_p(x) \cos p\pi - J_p(x) \pi \sin p\pi - \frac{\partial}{\partial p} J_{-p}(x)}{\pi \cos p\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{p \rightarrow m} \left[\frac{\partial}{\partial p} J_p(x) - \frac{\frac{\partial}{\partial p} J_{-p}(x)}{\cos p\pi} \right] + \lim_{p \rightarrow m} \frac{J_p(x) \sin p\pi}{\cos p\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial p} J_p(x) - (-1)^m \frac{\partial}{\partial p} J_{-p}(x) \right]_{p=m}. \end{aligned}$$

Esta función es una función de Bessel de segunda clase. Se sigue que

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x)$$

es la solución general de la ecuación de Bessel para todo p , entero o no, ya que la función $Y_p(x)$ no es acotada cerca de $x = 0$ para todo $p \geq 0$. Esto se ve claramente para Y_0 en la figura 2.3.

Veamos la explicación de (2.12). Si x es grande, el comportamiento de $Y_p(x)$ es similar al comportamiento de $J_p(x)$. Mediante el cambio de variable $u(x) = \sqrt{x}y(x)$ hemos transformado la ecuación de Bessel en (2.2). Cuando x es grande, (2.2) se aproxima a la ecuación diferencial $u'' + u = 0$, cuyas soluciones independientes son $u_1(x) = \cos x$ y $u_2(x) = \sin(x)$. Por tanto, para grandes valores de x , la ecuación de Bessel se comportará como una combinación lineal de

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x.$$

Además

$$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_1(x)}{x^{3/2}}$$

y

$$Y_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_2(x)}{x^{3/2}},$$

siendo $r_1(x)$ y $r_2(x)$ dos funciones acotadas cuando $x \rightarrow \infty$.¹

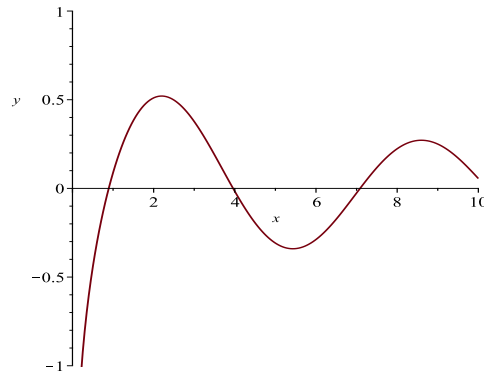


Figura 2.3: Función Y_0

Cuando $p = \frac{1}{2}$ se verifica

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad (2.13)$$

y

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (2.14)$$

¹La demostración de las dos últimas expresiones se puede ver en G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2ª ed., Cambridge University Press, Londres 1944, capítulo VII; o en R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol.1, págs 331-334, 524-526, Interscience-Wiley, Nueva York, 1953.

Probemos (2.13) . Comenzamos escribiendo la función de Bessel de orden $p = 1/2$

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+1/2}}{n!(1/2+n)!},$$

que también podemos poner de la forma

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1} n!(1/2+n)!}.$$

El resultado de las multiplicaciones del denominador de la suma es, teniendo en cuenta (1.5),

$$(2n+1)!\sqrt{\pi}$$

Finalmente, obtenemos

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Para probar (2.14) hacemos algo análogo. La función de Bessel de orden $p = -1/2$ es

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n-1/2}}{n!(-1/2+n)!},$$

o, equivalentemente,

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!(-1/2+n)!}.$$

Efectuando las operaciones y teniendo en cuenta (1.6) vemos que el denominador de la suma es

$$(2n)!\sqrt{\pi}$$

y, por tanto,

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

2.4. Ecuaciones de Bessel que no parecen serlo

Hay ecuaciones diferenciales que, aunque no lo parezcan, son ecuaciones de Bessel y, por tanto, son resolubles mediante funciones de Bessel. Por ejemplo,

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2c+1)x \frac{dy}{dx} + [a^2 b^2 x^{2b} + (c^2 - p^2 b^2)] y = 0. \quad (2.15)$$

Vamos a transformar la ecuación de Bessel

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2) w = 0 \quad (2.16)$$

en la ecuación diferencial anterior.

Hacemos el cambio de variable $z = ax^b$ y $w = yx^c$, donde a, b, c son constantes

$$z = ax^b \Rightarrow x = (a^{-1}z)^{1/b} = a^{-1/b} z^{1/b},$$

$$x = a^{-1/b} z^{1/b} \longrightarrow dx = b^{-1} a^{-1/b} z^{-1/b-1} dz \Rightarrow \frac{dx}{dz} = b^{-1} a^{-1/b} z^{-1/b-1},$$

$$w = yx^c \longrightarrow \frac{dw}{dx} = \frac{dy}{dx} x^c + ycx^{c-1}.$$

Calculamos $\frac{dw}{dz}$ y $\frac{d^2 w}{dz^2}$:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}, \text{ por tanto}$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \left(\frac{dy}{dx} x^c + ycx^{c-1} \right) b^{-1} a^{-1/b} z^{-1/b-1} \\ &= \left(\frac{dy}{dx} x^c + ycx^{c-1} \right) b^{-1} a^{-1/b} (ax^b)^{1/b-1} \\ &= \left(\frac{dy}{dx} x^c + ycx^{c-1} \right) b^{-1} a^{-1/b} a^{1/b-1} (x^b)^{1/b-1} \\ &= \left(\frac{dy}{dx} x^c + ycx^{c-1} \right) b^{-1} a^{-1} x^{1-b}. \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dz} \right) \cdot \frac{dx}{dz}, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} x^{c+1-b} + ycx^{c-b} \right) b^{-1} a^{-1} b^{-1} a^{-1/b} (ax^b)^{1/b-1} \\ &= \left(\frac{d^2 y}{dx^2} x^{c+1-b} + \frac{dy}{dx} (c+1-b)x^{c-b} + \frac{dy}{dx} cx^{c-b} + yc(c-b)x^{c-b-1} \right) b^{-2} a^{-2} x^{1-b} \\ &= \left(\frac{d^2 y}{dx^2} x^{c+2-2b} + (2c+1-b) \frac{dy}{dx} x^{c-2b+1} + yc(c-b)x^{c-2b} \right) b^{-2} a^{-2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.16) los resultados obtenidos y $z = ax^b$, tenemos

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} x^{c+2} + (2c+1-b) \frac{dy}{dx} x^{c+1} + yc(c-b)x^c \right) b^{-2} + \left(\frac{dy}{dx} x^c + ycx^c \right) b^{-1} + (a^2 x^{2b} - p^2) yx^c = 0,$$

multiplicamos por b^2 y dividimos por x^c la anterior expresión y llegamos a la ecuación diferencial (2.15).

Como y es la solución general de (2.15) y w es la solución general de (2.16) y hemos hecho el cambio de variable $z = ax^b$ y $w = yx^c$, podemos escribir y en términos de funciones de Bessel de la siguiente manera

$$y = x^{-c} \left[c_1 J_p \left(ax^b \right) + c_2 J_{-p} \left(ax^b \right) \right], \quad \text{si } p \text{ no es entero}$$

$$y = x^{-c} \left[c_1 J_p \left(ax^b \right) + c_2 Y_p \left(ax^b \right) \right], \quad \text{en todos los casos.}$$

Otra ecuación diferencial que a simple vista no parece ser una ecuación de Bessel es la ecuación de Airy

$$y'' + xy = 0.$$

Si la escribimos de la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + xy = 0$$

vemos que es la ecuación (2.15) para los valores $p = \frac{1}{3}$, $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{3}{2}$ y $c = -\frac{1}{2}$. Por tanto, su solución general en términos de funciones de Bessel es

$$y = x^{-1/2} \left[c_1 J_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + c_2 J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right].$$

Capítulo 3

Propiedades de las funciones de Bessel

Recordemos que la función de Bessel de primera clase se ha definido para todo número real p como

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p}}{n!(p+n)!}. \quad (3.1)$$

En este capítulo veremos algunas propiedades importantes de estas funciones.

3.1. Identidades

Proposición 3.1. *Se verifican las fórmulas*

1)

$$\frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x)$$

2)

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x).$$

Demostración.

1) Multiplicamos (3.1) por x^p y derivamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)x^{2n+2p}}{2^{2n+p}n!(p+n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2p-1}}{2^{2n+p-1}n!(p+n-1)!} \\ &= x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p-1}}{n!(p-1+n)!} = x^p J_{p-1}(x). \end{aligned}$$

2) Se prueba de manera similar a 1). Multiplicamos (3.1) por x^{-p} y derivamos

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+p} n! (p+n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n+p-1} (n-1)! (p+n)!}.$$

Reemplazando la variable muda n por $n+1$, hacemos que la suma comience en $n=0$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2^{2n+p+1} n! (p+n+1)!} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+p+1} n! (p+n+1)!} \\ &= -x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+p+1}}{2^{2n+p+1} n! (p+1+n)!} = -x^{-p} J_{p+1}(x). \end{aligned}$$

□

Proposición 3.2. *Se verifican las fórmulas*

$$J'_p(x) + \frac{p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) \quad (3.2)$$

y

$$J'_p(x) - \frac{p}{x} J_p(x) = J_{p+1}(x), \quad (3.3)$$

Demostración. Derivamos 1) y en 2) de la Proposición 3.1:

$$p x^{p-1} J_p(x) + x^p J'_p(x) = x^p J_{p-1}(x) \quad (3.4)$$

$$-p x^{-p-1} J_p(x) + x^{-p} J'_p(x) = -x^{-p} J_{p+1}(x), \quad (3.5)$$

Dividimos (3.4) por x^p y (3.5) por x^{-p} y obtenemos

$$J'_p(x) + \frac{p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x).$$

$$J'_p(x) - \frac{p}{x} J_p(x) = -J_{p+1}(x),$$

□

Proposición 3.3. *Se verifican las fórmulas*

$$2J'_p(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x). \quad (3.6)$$

y

$$\frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x). \quad (3.7)$$

Demostración. Sumamos y restamos (3.2) y (3.3). Por tanto

$$2J'_p(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x). \quad (3.8)$$

$$\frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x). \quad (3.9)$$

□

Estas fórmulas nos permiten expresar las funciones de Bessel y sus derivadas en términos de otras funciones de Bessel. Por ejemplo, aplicando (3.9) escribimos $J_2(x)$, $J_3(x)$ y $J_4(x)$ en términos de $J_0(x)$ y $J_1(x)$:

$$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x),$$

$$J_3(x) = \frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x) = \left(\frac{8}{x} - 1 \right) J_1(x) - \frac{4}{x} J_0(x).$$

$$J_4(x) = \frac{6}{x} J_3(x) - J_2(x) = \left(\frac{48}{x^2} - \frac{8}{x} \right) J_1(x) - \left(-\frac{24}{x^2} + 1 \right) J_0(x).$$

También será de utilidad escribir las fórmulas de la proposición 3.1 de la forma

$$\int x^p J_{p-1}(x) dx = x^p J_p(x) + c, \quad (3.10)$$

$$\int x^{-p} J_{p+1}(x) dx = -x^{-p} J_p(x) + c. \quad (3.11)$$

ya que nos permitirán integrar expresiones que involucren funciones de Bessel. Por ejemplo, cuando $p = 1$, aplicando (3.10) obtenemos

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x) + c. \quad (3.12)$$

3.2. Las funciones de Bessel esféricas

Llamamos *funciones de Bessel esféricas* a las funciones $J_{m+1/2}(x)$. Este nombre se debe a que aparecen al resolver la ecuación de ondas en coordenadas esféricas.

Recordemos las fórmulas

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

y

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

Aplicando (3.9) podemos escribir, por ejemplo

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right),$$

$$\begin{aligned}
J_{5/2}(x) &= \frac{3}{4}J_{3/2}(x) - J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3 \operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{3 \cos x}{x} - \operatorname{sen} x \right), \\
J_{-3/2}(x) &= -\frac{1}{x}J_{-1/2}(x) - J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\frac{\cos x}{x} - \operatorname{sen} x \right), \\
J_{-5/2}(x) &= -\frac{3}{x}J_{-3/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3 \cos x}{x^2} + \frac{3 \operatorname{sen} x}{x} - \cos x \right).
\end{aligned}$$

Es evidente que este proceso puede continuar indefinidamente. En consecuencia, toda $J_{m+1/2}$, con m entero es elemental. Liouville probó que estas eran las únicas funciones de Bessel elementales.

3.3. Ceros de las funciones de Bessel

Los ceros de algunas funciones de Bessel están tabulados en muchos libros de tablas matemáticas. Es el caso de la funciones $J_0(x)$ y $J_1(x)$, cuyos ceros se conocen con mucha precisión.

Los primeros cinco ceros de $J_0(x)$ son, aproximadamente, 2,4048, 5,5201, 8,6537, 11,7915 y 14,9309 ; y los primeros cinco ceros de $J_1(x)$ son 3,8317, 7,0156, 10,1735, 13,3237, y 16,4706.

Enunciamos ahora dos teoremas que serán de utilidad.

Teorema 3.4. *Sea $u(x)$ cualquier solución no trivial de $u'' + q(x)u = 0$, donde $q(x) > 0$, para todo $x > 0$. Si*

$$\int_1^\infty q(x) dx = \infty$$

entonces $u(x)$ tiene infinitos ceros en el semieje x positivo.

Teorema 3.5 (teorema de comparación de Sturm). *Sean $y(x)$, $z(x)$ soluciones no triviales de*

$$y'' + q(x)y = 0$$

y

$$z'' + r(x)z = 0,$$

donde $q(x)$ y $r(x)$ son funciones positivas tales que $q(x) > r(x)$. Entonces $y(x)$ se anula al menos una vez entre dos ceros sucesivos de $z(x)$.

Vamos a estudiar el comportamiento de los ceros de las funciones de Bessel.

Proposición 3.6. *Toda solución no trivial de la ecuación de Bessel tiene infinitos ceros positivos.*

Demostración. Sea $u(x)$ una solución no trivial de la ecuación de Bessel. Recordemos que la forma normal es

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right) u = 0.$$

Cuando x es grande,

$$q(x) = 1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}$$

es mayor que cero.

Calculamos la integral

$$\int_1^\infty q(x) dx = \int_1^\infty \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[b - 1 + \frac{1 - 4p^2}{4} \left(-\frac{1}{b} + 1\right)\right] = \infty.$$

Por el teorema 3.4, $u(x)$ tiene infinitos ceros en el semieje positivo. \square

Teorema 3.7. *Sea $u(x)$ una solución no trivial de la ecuación de Bessel*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)x = 0$$

sobre el semieje x positivo. Se verifica:

- 1) Si $0 \leq p < 1/2$, entonces todo intervalo de longitud π contiene al menos un cero de $u(x)$.
- 2) Si $p = 1/2$, la distancia entre dos ceros sucesivos de $u(x)$ es exactamente π .
- 3) Si $p > 1/2$, entonces todo intervalo de longitud π contiene a lo sumo un cero de $u(x)$.

Demostración. Consideremos la ecuación de Bessel en su forma normal

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right) u = 0.$$

- 1) Si $0 \leq p < \frac{1}{2}$, $q(x) = 1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2} > 1$.

Sean $u(x)$ una solución no trivial de $u'' + q(x)u = 0$ y $z(x)$ una solución no trivial de $z'' + z = 0$. Como $q(x) > r(x) = 1$, por el teorema 3.5, $u(x)$ se anula al menos una vez entre dos ceros sucesivos de $z(x)$. Las soluciones de $z'' + z = 0$ son $\sin x$ y $\cos x$. La distancia entre dos ceros de $\sin x$ y la distancia entre dos ceros de $\cos x$ es π , por tanto, $u(x)$ se anula al menos una vez en un intervalo de longitud π .

- 2) Cuando $p = \frac{1}{2}$, la ecuación es $u'' + u = 0$, cuyas soluciones son las funciones $\sin x$ y $\cos x$. Entonces $y_p(x)$ se anula exactamente una vez en un intervalo de longitud π .

3) Si $p \geq \frac{2}{2}$, $q(x) = 1 + \frac{1-4p^2}{4x^2} < 1$.

Sean $u(x)$ una solución no trivial de $u'' + q(x)u = 0$ y $z(x)$ una solución no trivial de $z'' + z = 0$. Como $1 = r(x) > q(x)$, aplicando el teorema 3.5, tenemos que $z(x)$ se anula al menos una vez entre dos ceros sucesivos de $u(x)$. Sabemos que la distancia entre dos ceros sucesivos de $z(x)$ es π , entonces $z(x)$ se anula al menos una vez entre dos ceros sucesivos de $u(x)$. Por tanto, $u(x)$ se anula a lo sumo una vez entre dos ceros de $z(x)$. En consecuencia, un intervalo de longitud π contiene a lo sumo un cero de $u(x)$.

□

Proposición 3.8. *Entre dos ceros de $J_p(x)$ hay al menos un cero de $J_{p+1}(x)$.*

Demostración. Por la proposición 3.6, $J_p(x)$ tiene infinitos ceros positivos. Los ceros positivos de $J_p(x)$ y los ceros positivos de $x^{-p}J_p(x)$ son los mismos. Sean a, b dos ceros positivos de $x^{-p}J_p(x)$, supongamos que $a < b$. La función $x^{-p}J_p(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $a^{-p}J_p(a) = b^{-p}J_p(b)$. Por el teorema de Rolle, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$\left(\frac{d}{dx} [x^{-p}J_p(x)] \right)_{x=c} = 0.$$

Por el apartado 2) de la proposición 3.1,

$$\left(\frac{d}{dx} [x^{-p}J_p(x)] \right)_{x=c} = -c^{-p}J_{p+1}(c)$$

y, entonces, $J_{p+1}(c) = 0$.

Hemos probado que entre dos ceros positivos sucesivos de $x^{-p}J_p(x)$ hay al menos un cero positivo de $J_{p+1}(x)$. Por tanto, entre dos ceros positivos sucesivos de $J_p(x)$ existe al menos un cero positivo de $J_{p+1}(x)$. □

Proposición 3.9. *Entre dos ceros de $J_{p+1}(x)$ hay al menos un cero de $J_p(x)$.*

Demostración. Sabemos por la proposición 3.6 que $J_{p+1}(x)$ tiene infinitos ceros positivos. Los ceros positivos de $J_{p+1}(x)$ son los mismos que los ceros positivos de $x^{p+1}J_{p+1}(x)$. Sean a, b dos ceros positivos de $x^{p+1}J_{p+1}(x)$, supongamos que $a < b$. $x^{p+1}J_{p+1}(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $a^{p+1}J_{p+1}(a) = b^{p+1}J_{p+1}(b)$. Por el teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\left(\frac{d}{dx} [x^{p+1}J_{p+1}(x)] \right)_{x=c} = 0.$$

Aplicando el apartado 1) de la proposición 3.1, tenemos que

$$\left(\frac{d}{dx} [x^{p+1}J_{p+1}(x)] \right)_{x=c} = c^{p+1}J_p(c).$$

Por tanto, $J_p(c) = 0$ Hemos probado que entre dos ceros positivos sucesivos de $J_{p+1}(x)$ hay al menos un cero positivo de $J_p(x)$. Por tanto, entre dos ceros positivos sucesivos de $J_{p+1}(x)$ existe al menos un cero positivo de $J_p(x)$. \square

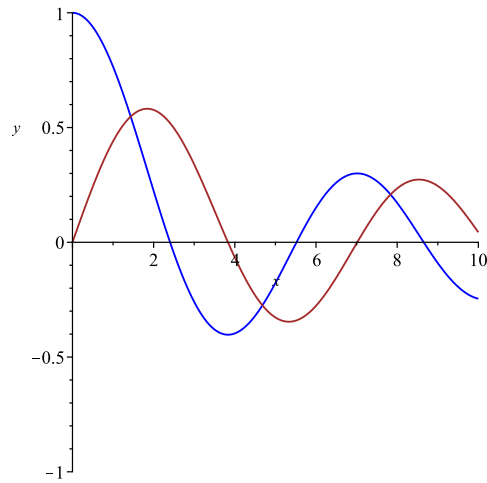


Figura 3.1: Funciones de Bessel J_0 y J_1

Como consecuencia inmediata de la proposición 3.8 y la proposición 3.9, los ceros positivos de $J_p(x)$ y de $J_{p+1}(x)$ ocurren alternadamente, es decir, entre cada par de ceros positivos sucesivos de una de ellas hay exactamente un cero de la otra. Esto se ve en la figura 3.1, donde hemos representado la función $J_0(x)$ de color azul y la $J_1(x)$, de color rojo.

3.4. Propiedades de ortogonalidad

Por cuestión de comodidad trabajaremos en el intervalo $[0, 1]$. Mediante un cambio de variable es posible adaptar todas la fórmulas que escribamos en la siguiente proposición a intervalos de la forma $[0, a]$.

Proposición 3.10. Sean $x \in [0, 1]$, y λ_n y λ_m los ceros positivos de alguna función de Bessel fija $J_p(x)$ con $p \geq 0$. Se verifica:

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_m x) J_p(\lambda_n x) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{1}{2} J_{p+1}(\lambda_n)^2 & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Demostración. La función $y = J_p(x)$ es solución de

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Sean a y b son constantes positivas distintas. La función $u(x) = J_p(ax)$ satisface la ecuación

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(a^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)u = 0 \quad (3.13)$$

y la función $v(x) = J_p(bx)$ satisface la ecuación

$$v'' + \frac{1}{x}v' + \left(b^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)v = 0. \quad (3.14)$$

Multiplicando (3.13) por v , obtenemos

$$u''v + \frac{1}{x}u'v + \left(a^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)uv = 0 \quad (3.15)$$

y multiplicando (3.14) por u ,

$$v''u + \frac{1}{x}v'u + \left(b^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)vu = 0. \quad (3.16)$$

Restamos (3.15) y (3.16), entonces

$$\frac{d}{dx}(u'v - v'u) + \frac{1}{x}(u'v - v'u) = (b^2 - a^2)uv. \quad (3.17)$$

Multiplicamos (3.17) por x . Por tanto,

$$\frac{d}{dx}[x(u'v - v'u)] = (b^2 - a^2)xuv.$$

Integramos entre 0 y 1 esta última expresión y resulta

$$(b^2 - a^2) \int_0^1 xuv \, dx = [x(u'v + v'u)]_0^1.$$

Es claro que $[x(u'v - v'u)]$ se anula en el extremo $x = 0$. En el extremo $x = 1$, tenemos $u(1) = J_p(a)$ y $v(1) = J_p(b)$. Por tanto, $(b^2 - a^2) \int_0^1 xuv \, dx = 0$ si $a = \lambda_m$ y $b = \lambda_n$ son dos ceros distintos positivos de $J_p(x)$. Es decir,

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_m x) J_p(\lambda_n x) \, dx = 0.$$

Con esto tenemos probada la primera parte de la proposición. Ahora vamos a calcular

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_n x) J_p(\lambda_n x) \, dx. \quad (3.18)$$

Multiplicamos (3.13) por $2x^2u'$. Entonces,

$$2x^2u'u'' + 2xu'^2 + 2a^2x^2uu' - 2p^2uu' = 0, \quad (3.19)$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{d}{dx} (x^2u'^2) + \frac{d}{dx} (a^2x^2u^2) - 2a^2xu^2 - \frac{d}{dx} (p^2u^2) = 0. \quad (3.20)$$

Integrando entre $x = 0$ y $x = 1$:

$$2a^2 \int_0^1 xu^2 \, dx = [x^2u'^2 + (a^2x^2 - p^2)u^2]_0^1. \quad (3.21)$$

$[x^2u'^2 + (a^2x^2 - p^2)u^2]_0^1$ se anula en $x = 0$, y $u'(1) = aJ'_p(a)$. Por tanto,

$$\int_0^1 x J_p(ax)^2 \, dx = \frac{1}{2} J'_p(a)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{a^2}\right) J_p(a)^2$$

en virtud de (3.21). Finalmente, ponemos $a = \lambda_n$ y, aplicando la fórmula (3.3) obtenemos

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_n x)^2 \, dx = \frac{1}{2} J'_p(\lambda_n)^2 = \frac{1}{2} J_{p+1}(\lambda_n)^2$$

y hemos terminado la demostración. □

3.5. Series de Bessel

Muchas veces, en física matemática es útil desarrollar una función dada en términos de funciones de Bessel. Los desarrollos más simples son las series de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_p(\lambda_n x) = a_1 J_p(\lambda_1 x) + a_2 J_p(\lambda_2 x) + \cdots, \quad (3.22)$$

donde $f(x)$ está definida en el intervalo $[0, 1]$ y los λ_n son los ceros de una función de Bessel fija $J_p(x)$ con $p \geq 0$. Igual que en la proposición 3.10, por comodidad, trabajaremos en el intervalo $[0, 1]$ y mediante un cambio de variable, será posible adaptar las fórmulas para intervalos de la forma $[0, a]$.

Supongamos que es posible escribir la función $f(x)$ como un desarrollo de la forma (3.22). Multiplicando por $xJ_p(\lambda_mx) dx$ tenemos

$$xf(x)J_p(\lambda_mx) = \sum_{n=0}^{\infty} xa_n J_p(\lambda_mx) J_p(\lambda_nx).$$

Integrando término a término entre 0 y 1, y aplicando la proposición 3.10 llegamos a

$$\int_0^1 xf(x)J_p(\lambda_mx) dx = \frac{1}{2}a_m J_{p+1}(\lambda_m)^2.$$

Sustituimos m por n y obtenemos la fórmula de los a_n

$$a_n = \frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2} \int_0^1 xf(x)J_p(\lambda_nx) dx. \quad (3.23)$$

Una serie de la forma (3.22) con los coeficientes calculados mediante (3.23) recibe el nombre de *serie de Bessel* o *serie de Fourier-Bessel*.

Enunciamos un teorema de gran envergadura que da condiciones bajo las cuales converge la serie de Bessel con suma $f(x)$.

Teorema 3.11 (Teorema del desarrollo de Bessel). *Supongamos que $f(x)$ y $f'(x)$ tienen a lo sumo un número finito de discontinuidades de salto en el intervalo $[0, 1]$. Si $x \in (0, 1)$, entonces la serie de Bessel (3.22) converge a $f(x)$ cuando x es un punto de continuidad de esta función, y a $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ cuando x es un punto de discontinuidad.¹*

En el extremo $x = 1$ la serie converge a cero independientemente para cualquier función ya que todo $J_p(\lambda_n)$. También converge a cero en $x = 0$ si $p > 0$ y a $f(0^+)$ si $p = 0$.

Veamos unos ejemplos de cálculo y convergencia de series de Bessel.

Ejemplo 3.12. Vamos a calcular la serie de Bessel de la función $f(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ en términos de las funciones $J_0(\lambda_n)$, donde los λ_n son los ceros positivos de $J_0(x)$. (3.23) es aquí

$$a_n = \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2} \int_0^1 xJ_0(\lambda_nx) dx.$$

¹Puede verse en G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2ª ed., Cambridge University Press, Londres 1944, capítulo XVIII.

Por la fórmula (3.12),

$$\int_0^1 x J_0(\lambda_n x) dx = \left[\frac{1}{\lambda_n} x J_1(\lambda_n x) \right]_0^1 = \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n}.$$

Entonces

$$a_n = \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

y

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n x), \quad \text{con } 0 \leq x < 1$$

es la serie de Bessel de $f(x) = 1$.

Ejemplo 3.13. Definimos $f(x)$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Vamos a hallar la serie de Bessel de $f(x)$ en términos de $J_0(x)$. Calculamos los a_n mediante (3.23):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2} \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_n x) dx = \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2} \int_0^{1/2} f(x) J_0(\lambda_n x) dx + \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2} \int_{1/2}^1 0 \cdot f(x) J_0(\lambda_n x) dx \\ &= \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2 \lambda_n} \int_0^{1/2} \lambda_n J_0(\lambda_n x) dx = \frac{J(\lambda_n/2)}{J_1(\lambda_n)^2 \lambda_n}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n/2)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)^2} J_0(\lambda_n x)$$

es la deseada serie de Bessel.

Aplicando el teorema 3.11, la serie de Bessel convergerá a $f(x)$ en $(0, 1/2)$ y en $(1/2, 1)$ y, como el punto $x = \frac{1}{2}$ es un punto de discontinuidad de $f(x)$, en $x = \frac{1}{2}$ la serie de Bessel convergerá a

$$\frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{2}^-\right) + f\left(\frac{1}{2}^+\right) \right] = \frac{1}{2} (1 + 0) = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3.14. Sea $f(x) = x^p$ en el intervalo $0 \leq x < 1$. Vamos a desarrollar su serie de Bessel en términos de las funciones $J_p(\lambda_n x)$, donde los λ_n son los ceros positivos de $J_p(x)$.

Obtenemos los a_n mediante (3.23),

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2} \int_0^1 x \cdot x^p J_p(\lambda_n x) dx \\
 &= \frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2} \int_0^1 x^{p+1} J_p(\lambda_n x) dx \\
 &= \frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2 \lambda_n} \int_0^1 \lambda_n x^{p+1} J_p(\lambda_n x) dx \\
 &= \frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2 \lambda_n} \int_0^1 \frac{d}{dx} [x^{p+1} J_{p+1}(\lambda_n x)] dx \\
 &= \frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2 \lambda_n} J_{p+1}(\lambda_n),
 \end{aligned}$$

y la serie de Bessel que buscamos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_p(\lambda_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)} J_p(\lambda_n x)$$

y, por el teorema 3.11, convergerá a $f(x)$ para $0 < x < 1$.

3.6. La función generatriz

Proposición 3.15. *Sea n un entero y $J_n(x)$ la función de Bessel de orden n . Se tiene*

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) [t^n + (-1)^n t^{-n}].$$

Demostración. Comenzamos escribiendo $e^{(x/2)(t-1/t)}$ como producto de las series

$$e^{xt/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{x^j}{2^j} t^j$$

y

$$e^{-xt^{-1}/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{2^k} t^{-k}$$

Ahora multiplicamos estas dos series. El resultado es una serie doble, es decir, una serie cuyos términos son todos los posibles productos de un término de la primera serie por uno de la segunda. La serie doble converge a la suma correspondiente con independencia del orden de sus términos por ser las dos series absolutamente convergentes.

Para cada entero fijado $n \geq 0$, obtenemos el término de la serie doble con la potencia t^n cuando $j = n + k$. Sumamos en k y obtenemos que el coeficiente de t^n es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \frac{x^{n+k}}{2^{n+k}} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!} = J_n(x)$$

Análogamente, para cada entero fijado $n \geq 1$, obtenemos el término de la serie doble con la potencia t^{-n} cuando $k = n + j$. Sumamos en j y obtenemos que el coeficiente de t^{-n} es

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{x^j}{2^j} \frac{(-1)^{n+j}}{(n+j)!} \frac{x^{n+j}}{2^{n+j}} = (-1)^n \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(x/2)^{2j+n}}{j!(n+j)!} = (-1)^n J_n(x).$$

Finalmente, obtenemos

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} J_{-n}(x) t^{-n} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) [t^n + (-1)^n t^{-n}].$$

□

Recordemos que $J_{-n} = (-1)^n J_n(x)$ cuando n es entero. Entonces, la fórmula de la Proposición 3.15 se puede escribir como

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \quad (3.24)$$

Proposición 3.16. *Se verifica*

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x) J_k(y).$$

Demostración. Tenemos que

$$e^{(x/2)(t-1/t)} e^{(y/2)(t-1/t)} = e^{[(x+y)/2](t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) t^n.$$

Sabemos que

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_j(x) t^j$$

y

$$e^{(y/2)(t-1/t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(y) t^k.$$

Entonces

$$e^{(x/2)(1-1/t)} e^{(y/2)(1-1/t)} = \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} J_j(x) t^j \right] \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(y) t^k \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x) J_k(y) \right] t^n.$$

Igualando los coeficientes de t^n obtenemos

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x) J_k(y).$$

□

La fórmula de la Proposición 3.16 se llama *fórmula de la suma*. Cuando $n = 0$ se escribe

$$\begin{aligned}
 J_0(x+y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(x)J_n(y) \\
 &= J_0(x)J_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} J_{-k}(x)J_k(y) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(x)J_{-k}(y) \\
 &= J_0(x)J_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} [J_{-k}(x)J_k(y) + J_k(x)J_{-k}(y)] \\
 &= J_0(x)J_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [J_k(x)J_k(y) + J_k(x)J_k(y)] \\
 &= J_0(x)J_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2J_k(x)J_k(y),
 \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$J_0(x+y) = J_0(x)J_0(y) - 2J_1(x)J_1(y) + 2J_2(x)J_2(y) - \dots \quad (3.25)$$

Cuando $y = -x$, $J_0(x+(-x)) = J_0(0) = 1$. Como $J_n(x)$ es par o impar según lo sea n , la expresión (3.25) se convierte en

$$1 = J_0(x)^2 - 2J_1(x)^2 + 2J_2(x)^2 - \dots$$

y deducimos que $|J_0(x)| \leq 1$ y $|J_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ para $n = 1, 2, \dots$

3.7. La fórmula integral de Bessel

En sus trabajos de astronomía, Bessel encontró las funciones $J_n(x)$ en la fórmula integral y a partir de ella dedujo muchas propiedades. En esta sección trataremos de deducir esa fórmula integral.

Si $t = e^{i\theta}$ en (3.24) tenemos

$$\frac{x}{2} \left(e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}} \right) = \frac{x}{2} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = x \frac{\cos \theta + i \sin \theta - (\cos \theta - i \sin \theta)}{2} = x \frac{2i \sin \theta}{2} = ix \sin \theta.$$

y (3.24) se convierte en

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta}. \quad (3.26)$$

Igualamos las partes reales en (3.26) ,

$$\cos(x \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos n\theta. \quad (3.27)$$

Por la relación $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, podemos escribir

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(x) \cos(-n\theta).$$

Como el coseno es una función par,

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(x) \cos(n\theta),$$

que es lo mismo que

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] J_n(x) \cos(n\theta).$$

Entonces

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta). \quad (3.28)$$

Cuando $\theta = 0$ en (3.28) obtenemos la serie

$$1 = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \cdots$$

Cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ en (3.28) tenemos

$$\cos x = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(n\pi) = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \cdots \quad (3.29)$$

Ahora igualamos las partes imaginarias en (3.26)

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \operatorname{sen} n\theta. \quad (3.30)$$

Por la relación $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, podemos escribir

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \operatorname{sen}(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(x) \operatorname{sen}(-n\theta).$$

El seno es una función impar, entonces,

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \operatorname{sen}(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_n(x) \operatorname{sen}(n\theta).$$

Esto es lo mismo que

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^{n+1}] J_n(x) \operatorname{sen}(n\theta).$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \operatorname{sen}((2n-1)\theta). \quad (3.31)$$

Cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ en (3.31) tenemos

$$\operatorname{sen} x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \cos(n\pi) = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \cdots, \quad (3.32)$$

En (3.29) y (3.32) se ve claramente la estrecha relación entre las funciones trigonométricas seno y coseno y las funciones de Bessel.

Proposición 3.17. *Sea n un entero, $J_n(x)$ la función de Bessel de orden n y $\theta \in [0, \pi]$ Se verifica la fórmula integral de Bessel:*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta.$$

Demostración. Multiplicamos (3.27) por $\cos(m\theta)$ y multiplicamos (3.30) por $\operatorname{sen}(m\theta)$. Obtenemos

$$\cos(m\theta) \cos(x \operatorname{sen} \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos(n\theta) \cos(m\theta)$$

y

$$\operatorname{sen}(m\theta) \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}(m\theta).$$

Sumamos los primeros miembros de estas expresiones

$$\cos(m\theta - x \operatorname{sen} \theta)$$

y sumamos los dos segundos miembros

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos((n-m)\theta). \quad (3.33)$$

Igualemos los dos resultados anteriores y obtenemos

$$\cos(m\theta - x \operatorname{sen} \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos((n-m)\theta) \quad (3.34)$$

El término $n = m$ de (3.33) es $J_m(x)$. Por tanto, podemos escribir (3.34) de la forma

$$\cos(m\theta - x \operatorname{sen} \theta) = J_m(x) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} J_n(x) \cos((n-m)\theta) \quad (3.35)$$

Integrando entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ a ambos lados de (3.35) tenemos

$$\int_0^\pi \cos(m\theta - x \operatorname{sen} \theta) = J_m(x)\pi.$$

o, equivalentemente,

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\theta - x \operatorname{sen} \theta). \quad (3.36)$$

Sustituimos m por n en (3.36) y llegamos a

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta,$$

que es la *fórmula integral de Bessel*. □

3.8. Algunas fracciones continuas

Escribimos la identidad (3.7) de la forma

$$J_{p-1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)$$

y la dividimos por $J_p(x)$. Entonces

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)} = \frac{2p}{x} - \frac{1}{J_p(x)/J_{p+1}(x)}. \quad (3.37)$$

Aplicando (3.37) a $J_p(x)/J_{p+1}(x)$ tenemos

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)} = \frac{2p+2}{x} - \frac{1}{J_{p+1}(x)/J_{p+2}(x)},$$

y a $J_{p+1}(x)/J_{p+2}(x)$,

$$\frac{J_{p+1}(x)}{J_{p+2}(x)} = \frac{2p+4}{x} - \frac{1}{J_{p+2}(x)/J_{p+3}(x)}.$$

Repitiendo indefinidamente este proceso llegamos a que (3.37) se puede escribir de la forma

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)} = \frac{2p}{x} - \frac{1}{\frac{2p+2}{x} - \frac{1}{\frac{2p+4}{x} - \dots}},$$

que es un desarrollo en fracción continua infinita de $J_{p-1}(x)/J_p(x)$.

Cuando $p = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\frac{J_{-1/2}(x)}{J_{1/2}(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{3}{x} - \frac{1}{\frac{5}{x} - \dots}}}.$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (2.23) y (2.24), podemos escribir

$$\cotg x = \frac{J_{-1/2}(x)}{J_{1/2}(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{3}{x} - \frac{1}{\frac{5}{x} - \dots}}$$

y entonces,

$$\tg x = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{3}{x} - \frac{1}{\frac{5}{x} - \dots}}}.$$

La fracción continua que hemos obtenido fue descubierta por Lambert en 1761. La utilizó para probar que π es un número irracional. Su razonamiento tenía algunas pequeñas lagunas que Legendre corregiría unos 30 años más tarde.

Capítulo 4

Funciones de Bessel y membranas vibrantes

En este capítulo vamos a tratar una aplicación sencilla de las funciones de Bessel en la teoría de Euler sobre las vibraciones de una membrana circular.

Una membrana, en nuestro caso, es una fina lámina uniforme de un material flexible en un estado de tensión uniforme y sujeta a lo largo de una curva cerrada del plano xy .

La membrana se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio y se suelta. Vamos estudiar el movimiento vibratorio que tiene lugar debido a las fuerzas de recuperación producidas por la deformación.

4.1. La ecuación del movimiento

Nuestro objetivo es formular una ecuación en derivadas parciales que describa el movimiento. Por este motivo sólo consideraremos pequeñas oscilaciones de una membrana vibrante libre. Aunque la membrana es atómica y no continua, esperamos que esa ecuación diferencial describa el movimiento con una precisión razonable.

Comenzamos suponiendo que las vibraciones son muy pequeñas y que la membrana sólo se mueve en la dirección z con desplazamiento dado en el instante t por una función $z = z(x, y, t)$. Trabajaremos en un pequeño trozo de membrana limitado por los planos verticales que pasan por los puntos (x, y) , $(x + \Delta x, y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, $(x, y + \Delta y)$ del plano xy .

La masa del trozo considerado es $m\Delta x\Delta y$, donde m es la masa por unidad de área. Por la segunda ley de Newton la fuerza que actúa sobre él en la dirección z viene dada por

$$m\Delta x\Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

Cuando la membrana se encuentra en la posición de equilibrio, el significado físico de la tensión constante T es el siguiente: A lo largo de cualquier segmento de longitud Δs , el material de un lado ejerce una fuerza sobre el material del otro lado. Esta fuerza tiene magnitud $T\Delta s$ y es normal al segmento Δs . De esta manera, las fuerzas sobre aristas opuestas en el pequeño trozo de membrana son paralelas al plano xy y se cancelan entre sí.

Cuando la membrana está ligeramente curvada, aunque que la deformación es muy pequeña y la tensión es todavía T , ahora no actúa paralelamente al plano xy ; actúa paralelamente al plano tangente y, por tanto, presenta componente vertical apreciable. La curvatura de nuestro trozo de membrana produce magnitudes diferentes para las componentes verticales sobre aristas opuestas y es responsable de las fuerzas de recuperación que producen el movimiento.

Consideremos un fragmento de membrana que denotamos por $ABCD$. Vamos a estudiar las fuerzas que en él se producen. Supongamos que $ABCD$ está sólo ligeramente curvado. Sobre las aristas AB y DC , las fuerzas son perpendiculares al eje x y casi paralelas al eje y . Sus pequeñas componentes en los puntos (x, y) y $(x, y + \Delta y)$ son aproximadamente iguales a

$$-T\Delta x \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \quad \text{y} \quad T\Delta x \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+\Delta y};$$

y su suma,

$$T\Delta x \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \right].$$

Hacemos algo análogo para las aristas AD y BC , entonces las componentes en los puntos (x, y) y $(x + \Delta x, y)$ son aproximadamente

$$-T\Delta y \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x \quad \text{y} \quad T\Delta y \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x+\Delta x};$$

y su suma

$$T\Delta y \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x \right].$$

En consecuencia la fuerza total en la dirección z , despreciando todas las fuerzas externas, es aproximadamente

$$F = T\Delta y \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x \right] + T\Delta x \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \right].$$

y, así, podemos expresar (4.1) en la forma

$$T \frac{(\partial z / \partial x)_{x+\Delta x} - (\partial z / \partial x)_x}{\Delta x} + T \frac{(\partial z / \partial y)_{y+\Delta y} - (\partial z / \partial y)_y}{\Delta y} = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Hacemos $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$, y obtenemos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\partial z / \partial x)_{x+\Delta x} - (\partial z / \partial x)_x}{\Delta x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

y

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} T \frac{(\partial z / \partial y)_{y+\Delta y} - (\partial z / \partial y)_y}{\Delta y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Finalmente, denotando $a^2 = \frac{T}{m}$ llegamos a

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad (4.2)$$

que es la ecuación de ondas bidimensional.

4.2. La membrana circular

Cuando la membrana es circular es lógico usar coordenadas polares con el origen en su centro. La ecuación de ondas (4.2) en coordenadas polares es

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad (4.3)$$

donde $z = z(r, \theta, t)$ es una función de las coordenadas polares y del tiempo.

Supongamos, por comodidad, que la membrana tiene radio $r = 1$. Así, la posición de equilibrio tendrá lugar cuando $r = 1$. Teniendo esto en cuenta nuestra condición de contorno es

$$z(1, \theta, t) = 0. \quad (4.4)$$

Más adelante impondremos ciertas condiciones iniciales. Tendremos que hallar una solución que satisfaga esas condiciones iniciales y la condición de contorno (4.4).

Aplicamos el método de separación de variables. Empezamos buscando soluciones particulares de la forma

$$z(r, \theta, t) = u(r)v(\theta)w(t). \quad (4.5)$$

Sustituimos (4.5) en (4.3) y reordenamos:

$$\frac{u''(r)}{u(r)} + \frac{1}{r} \frac{u'(r)}{u(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = \frac{1}{a^2} \frac{w''(t)}{w(t)}. \quad (4.6)$$

El miembro de la izquierda en (4.6) es sólo función de r y θ y el de la derecha es sólo función de t . Por tanto, ambos miembros deben ser constantes. Para que la membrana vibre $w(t)$ debe ser periódica. El lado derecho de (4.6) garantiza que esto ocurre cuando la

constante de separación sea negativa. Entonces, igualamos cada lado de (4.6) a $-\lambda^2$. con $\lambda > 0$ y obtenemos las dos ecuaciones

$$w''(t) + \lambda^2 a^2 w(t) = 0 \quad (4.7)$$

y

$$\frac{u''(r)}{u(r)} + \frac{1}{r} \frac{u'(r)}{u(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = -\lambda^2. \quad (4.8)$$

Vemos que la solución de (4.7) es

$$w(t) = c_1 \cos \lambda a t + c_2 \operatorname{sen} \lambda a t. \quad (4.9)$$

y que (4.8) se puede escribir de la forma

$$r^2 \frac{u''(r)}{u(r)} + r \frac{u'(r)}{u(r)} + \lambda^2 r^2 = -\frac{v''(\theta)}{v(\theta)}. \quad (4.10)$$

El miembro de la derecha en (4.10) es función de r y el de la izquierda es función de θ . Por tanto, ambos tienen que ser iguales a una constante. Debido a la utilización de coordenadas polares, $\theta = \theta + 2\pi n$ y, entonces, la función v debe ser constante o periódica con período 2π . A la vista del lado derecho de (4.10), es claro que esas posibilidades quedan cubiertas si tomamos como constante de separación n^2 , donde $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces obtenemos las dos ecuaciones siguientes

$$v''(\theta) + n^2 v(\theta) = 0 \quad (4.11)$$

y

$$r^2 u''(r) + r u'(r) + (\lambda^2 r^2 - n^2) u(r) = 0. \quad (4.12)$$

Cuando $n \neq 0$, la solución general de (4.11) es

$$v(\theta) = d_1 \cos(n\theta) + d_2 \operatorname{sen}(n\theta). \quad (4.13)$$

Cuando $n = 0$, la solución general es de la forma $v(\theta) = A\theta + B$, donde, al imponer la periodicidad, $A = 0$. Podemos incluir este caso en (4.13) ya que, cuando $n = 0$, (4.13) también cumple (4.11).

La ecuación diferencial (4.12) se obtiene haciendo el cambio de variable $z = \lambda r$ y $w = u$ a la ecuación de Bessel

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - n^2) w = 0$$

Entonces, su solución general viene dada por

$$u = c_1 J_n(\lambda r) + c_2 Y_n(\lambda r),$$

donde $J_n(\lambda r)$ es acotada e $Y_n(\lambda r)$ es no acotada. Como $u(r)$ es necesariamente acotada cerca de $r = 0$, nos quedamos sólo con la primera solución y escribimos

$$u(r) = kJ_n(\lambda r).$$

Podemos satisfacer la condición de contorno (4.4) haciendo que $u(1) = 0$, es decir

$$J_n(\lambda) = 0.$$

Vemos que los valores admisibles de λ son los ceros positivos de la función $J_n(x)$. La Proposición 3.6 nos garantiza que $J_n(x)$ tiene infinitos ceros positivos. Por consiguiente, las soluciones particulares de (4.5) son múltiplos constantes de

$$J_n(\lambda r) (d_1 \cos(n\theta) + d_2 \sin(n\theta)) (c_1 \cos(\lambda at) + c_2 \sin(\lambda at)), \quad (4.14)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$, y λ son los ceros positivos de $J_n(x)$ para cada $n = 0, 1, 2, \dots$

4.3. Condiciones iniciales especiales

Por motivos de simplicidad, en lo que sigue nos limitamos al caso de que la membrana esté desplazada a una $z = f(r)$, independiente de la variable θ y que en el instante $t = 0$ se suelta partiendo del reposo. Es, decir, imponemos las condiciones iniciales

$$z(r, \theta, 0) = f(r) \quad (4.15)$$

y

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (4.16)$$

Tenemos que determinar la forma $z(r, \theta, t)$ en cualquier instante posterior $t > 0$. De acuerdo con (4.15), la forma inicial es independiente de θ ; luego $v(\theta)$ tiene que ser constante y n tiene que ser cero en (4.13). Entonces, denotando los ceros positivos de $J_0(x)$ por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, (4.14) se reduce a

$$J_0(\lambda_n r) (c_1 \cos(\lambda_n at) + c_2 \sin(\lambda_n at)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Por (4.16), tenemos que $c_2 = 0$ y, entonces, en este caso, las soluciones particulares de (4.5) son los múltiplos constantes de las funciones

$$J_0(\lambda_n r) \cos(\lambda_n at), \quad n = 1, 2, \dots$$

Las sumas de soluciones de (4.13) son también soluciones, por tanto las soluciones más generales son las series infinitas

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \cos(\lambda_n at). \quad (4.17)$$

Para satisfacer la condición inicial (4.15) , ponemos $t = 0$ en (4.17) e igualamos el resultado a $f(r)$.

El Teorema 3.11 garantiza que, siempre que $f(r)$ se comporte suficientemente bien, la serie convergerá a $f(r)$. Definiendo los coeficientes mediante la expresión

$$a_n = \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r) dr,$$

(4.17) es una solución formal de (4.3) que satisface la condición de contorno y las condiciones iniciales dadas.

Apéndice

La función Gamma y las funciones de Bessel están implementadas en MAPLE. Escribimos los códigos requeridos para representar las gráficas:

- **Código MAPLE utilizado para representar la figura 1.1:**

```
> plot(GAMMA(z), z=-5..5);
```

- **Código MAPLE utilizado para representar la figura 2.1:**

```
> plot(BesselJ(0,x), x=0..10, y=-1..1);
```

- **Código MAPLE utilizado para representar la figura 2.2:**

```
> plot(BesselJ(1,x), x=0..10, y=-1..1);
```

- **Código MAPLE utilizado para representar la figura 2.3:**

```
> plot(BesselY(0,x), x=-10..10, y=-1..1);
```

- **Código MAPLE utilizado para representar la figura 3.1:**

```
> plot({BesselJ(0,x), BesselJ(1,x)}, x=0..10, color=[blue, brown]);
```

Podemos programar la fórmula de recurrencia (2.6) en MATLAB para un p y un a_0 dados. Un posible código para $p = 1$ y $a_0 = 0$ es:

```
p=1  
a_0=2  
a(1)=0;  
disp('a_1='); disp(a(1));
```

```
itmax=6
a(2)=-a_0/(2*(2*p+2));
disp('a_2='); disp(a(2));
for i=3:itmax
a(i)= -a(i-2)/(i*(2*p+i));
fprintf ('el coeficiente %d es \n %f \n',i, a(i))
end
```

Bibliografía

- [1] Simmons, George F, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, 2^a ed., McGraw-Hill, Madrid, 1993